1. SUITES NUMERIQUES

- Soit $M \subset \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$:
  1. On dit que k est un majorant de M si $\forall x \in M, x \leqslant k$.
  2. On dit que k est un minorant de M si $\forall x \in M, x \geqslant k$.
  3. M est bornée s'il lui existe un majorant et un minorant.
  4. a) M est bornée supérieurement s'il existe un majorant.
     b) M est bornée inférieurement s'il existe un minorant.

- Soit $M \subset \mathbb{R}$ non vide et $k \in \mathbb{R}$:
  1. On appelle k la borne supérieure de M et on note $k = \sup(M)$ si k est le plus petit majorant de M, c'est à dire que si $L < k$ alors L n'est pas majorant, ou encore $\forall L < k, \exists x \in M, x > L$.
  2. k est la borne inférieure de M et on note $k = \inf(M)$ si k est le plus grand minorant de M.

  /!\ $\inf(M)$ n'est pas toujours un élément de M
  ex: $M = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

- Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$:
  Axiome de la borne supérieure : tout $M \subset \mathbb{R}$ non vide et borné supérieurement possède une borne supérieure.

  /!\ Ce n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$!

- Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ notée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou de $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} | n \geqslant p\}$ dans $\mathbb{R}$ notée $(a_n)_{n \geqslant p}$.

  1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si $\exists k \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant k$
  2. Une suite est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geqslant a_n$
  3. Une suite est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} > a_n$
  4. Une suite est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leqslant a_n$
  5. Une suite est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} < a_n$
  6. Une suite est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

- Si $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels alors $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2} \cdots$ est appelée une sous-suite de $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}$.

- Soit $(a_n)_{n \geqslant p}$ une suite de réels et $L \in \mathbb{R}$.
  On dit $(a_n)_{n \geqslant p}$ converge vers L ou $L = \lim a_n$ si
  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, N \geqslant p$ tel que $\forall n \geqslant N, |a_n - L| \leqslant \epsilon$.

  1. " $\lim$ " est compatible avec $+, -, *$.
  2. Si $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ et $b_n \neq 0$ pour $n \geqslant p$ alors $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
  3. Une suite convergente (c'est à dire pour laquelle il existe une limite) est bornée.
  4. Une sous-suite d'une suite convergente converge aussi, et vers la même limite.
  5. Une suite bornée monotone converge.

  /:\ Le théorème 5 permet de montrer la convergence sans connaître la limite de la suite.

- Lemme : si $\lim a_n = L$ et $\lim a_n = k$ alors $L = K$.

- Propriété :
  Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites et a, b deux réels. Si $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \leqslant p$ $(p \in \mathbb{N})$ et $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ alors $a \leqslant b$.

  /!\ Avec strictement inférieur, ce n'est pas toujours vrai !

- Théorème : soient (a_n), (b_n), (c_n) trois suites telles que $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ pour tout n et $\lim a_n = \lim c_n =: L$ alors $\lim b_n = L$.

- Théorème de Bolzano / Weierstrass : soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée alors (a_n) admet une sous-suite convergente, c'est à dire qu'il existe une suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers naturels telle que $\lim n_i$ existe.

- Lemme :
Toute suite (a_n) admet une sous-suite monotone c'est à dire qu'il existe $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante telle que $(a_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante ou bien $(a_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- Définition : une fonction $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ est continue si pour tout $x\in[a;b]$, f est continue en x, c'est à dire si

$$\forall x\in[a;b], \forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall y\in[a;b], |y-x|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\epsilon$$

/:\ Si on choisit δ indépendant de x, on montre que :

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in[a;b], \forall y\in[a;b], |y-x|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\epsilon$$

et on dit que f est uniformément continue.

- Théorème : toute fonction continue définie sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue.

/!\ Sur un intervalle ouvert ce n'est pas toujours vrai ! ex: $f:]0;1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=1/x$

Suites de Cauchy

- Définition : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall\epsilon>0, \exists N, \forall n, m\in\mathbb{N}, m, n\geqslant N\Rightarrow|a_m-a_n|<\epsilon$$

- Théorème important : soit (a_n) une suite, on a

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ($\lim a_n$ existe)
$\Leftrightarrow$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

- Lemme : soient $(a_n),(b_n)$ deux suites, si $m\geqslant n\Rightarrow|a_m-a_n|\leqslant b_n$ et $\lim b_n=0$ alors (a_n) est une suite de Cauchy.

/:\ Le principe : on écrit $|a_m-a_n|$ et $m\geqslant n$, on essaie de majorer par un terme auxiliaire b_n qui ne dépende plus de m. On montre que $b_n\to 0$ et on obtient que (a_n) est une suite de Cauchy, donc elle converge.

/:\ On dit souvent $\lim a_n=+\infty$ ou bien a_n tend vers $+\infty$. Là, on dira que a_n diverge vers $+\infty$.

- Définition : on dit a_n diverge vers $+\infty$ ou $\lim a_n=+\infty$ si

$$\forall M\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N, a_n\geqslant M$$

2. SERIES NUMERIQUES

- Une série numérique notée $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ est la donnée de la suite $(a_m)_{m\geqslant p}$ et de la suite des sommes partielles (S_n) définie par

$$S_n=\sum_{l=p}^{n} a_l=a_p+a_{p+1}+\ldots+a_n$$

- On dit que la série numérique $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ converge si la suite des sommes partielles est convergente, c'est à dire si la limite de $S_n=\sum_{l=p}^{n} a_l$ existe. Si on a convergence on note $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ et on l'appelle la somme de la série numérique.

/!\ La série et sa limite (si elle existe) sont notées par le même symbole !

- <u>Exemple 1</u> : la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge si $|q|<1$.

  Il faut considérer les sommes partielles $S_n=\sum_{l=0}^{n} q^l=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

  Or $\lim_{n\to\infty} q^n=0$ si $|q|<1$ donc $\lim S_n=\frac{1-\lim q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}$.

  A connaître par coeur : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n=\frac{1}{1-q} \quad si |q|<1$

- <u>Exemple 2</u> : la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ Ici $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

  On voit que $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, ceci permet de donner une expression simple pour les sommes partielles :

  $$S_n=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l(l+1)}=\sum_{l=1}^{n}(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+1})=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

  $S_n=1-\frac{1}{n+1}$ on appelle ça une "somme téléscopique"

  $$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

  /:\ En général, on ne peut pas déterminer une expression simple pour exprimer la somme d'une série numérique.

- <u>Exemple 3</u> (très important) :

  La série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ ne converge pas !

  C'est l'exemple le plus simple d'une série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ où la suite a_n tend vers 0 mais la série <u>diverge quand même</u> !

- <u>Théorème</u> : si $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

  /!\ Il ne suffit pas d'avoir $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ pour conclure que $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

  /:\ Les séries suivantes convergent ou divergent ensemble : $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=p-1}^{\infty} a_{n+1}$.
  Les premiers termes d'une série n'influent pas sur la convergence.

  <u>A retenir</u> : en cas de convergence on a $\sum_{n=p}^{\infty} a_n=\sum_{n=q}^{\infty} a_n+\sum_{n=p}^{q-1} a_n$

- " convergence suites $\Leftrightarrow$ convergence séries "

  a) $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ (S_n) converge où $S_n=\sum_{l=p}^{n} a_l$

  b) $(b_n)_{n\geqslant p}$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=p}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ converge

  /:\ On s'en servira souvent pour réduire la convergence d'une suite à celle d'une série.

- <u>Théorème</u> de compatibilité avec $+, \leqslant$, linéarité :

  Soit $(a_n)_{n\geqslant p}$ et $(b_n)_{n\geqslant p}$ deux suites. On suppose que $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ et que $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ convergent. Alors on a...

1. si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\sum_{n=p}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ converge vers $\lambda \sum_{n=p}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=p}^{\infty} b_n$

2. si $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant p$ alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} b_n$

/!\ "1." n'est valable que si les <u>deux</u> séries convergent.

<u>Corollaire</u> :

Si $\sum_{l=p}^{\infty} a_l$ converge et $\sum_{l=p}^{\infty} b_l$ diverge, $\sum_{l=p}^{\infty} (a_l + b_l)$ diverge.

- <u>Définition</u> :
  Si $\sum_{l=p}^{\infty} a_l$ converge on définit le $n^{ième}$ reste $T_n = \sum_{l=n+1}^{\infty} a_l$.

/:\ On a vu que la convergence de $\sum_{l=p}^{\infty} a_l$ entraîne celle de $\sum_{l=n+1}^{\infty} a_l$. Donc T_n est bien défini pour $n \geqslant p$ par la formule $\sum_{l=p}^{\infty} a_l = \sum_{l=p}^{n} a_l + \sum_{l=n+1}^{\infty} a_l$ c'est à dire $\sum_{l=p}^{\infty} a_l = S_n + T_n$.

/:\ La $n^{ième}$ somme partielle additionnée au $n^{ième}$ reste nous donne la somme de la série.

- <u>Théorème</u> : si $\sum_{l=p}^{\infty} a_l$ converge alors $T_n \to 0$.

Les séries positives

- <u>Définition</u> :
  On dit que $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ est positive si $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant p$.

- <u>Théorème</u> : une série positive converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est bornée supérieurement.

/:\ Il est presque toujours plus simple de déterminer la convergence d'une série positive que de déterminer sa somme.

- <u>Théorème</u> (critère des majorants) :
  Soit $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ pour tout n assez grand.
  Si $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ converge alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge aussi.

/:\ Comme $b_n \geqslant a_n$ on appelle $\sum b_n$ une série majorante de $\sum a_n$.

/:\ La contraposée du critère des majorants nous donne : soit $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ pour tout n assez grand, si $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ diverge alors $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ diverge aussi.

/:\ Pour touver la convergence d'une série positive on essaie très souvent de trouver :
- soit un série majorante convergente
- soit une série minorante divergente

Dans le premier cas, on conclue que la série converge, dans le second qu'elle diverge.

Série positive divergente souvent utilisée : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Séries positives convergentes souvent utilisées comme majorant : $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \ avec \ 0 < q < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ avec \ \alpha > 1$

- <u>Théorème</u> : soit $f : [p, \infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction positive décroissante. Alors la série $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ converge si et seulement si $\exists M > 0, \forall T > p, \int_p^T (f(x) dx) < M$.

Les deux théorèmes suivants viennent de la comparaison d'une série positive avec la série géométrique.

- Critère de Cauchy : soit $a_n \geqslant 0$, s'il existe $q<1$ tel que $(a_n)^{1/n} \leqslant q$ pour tout n assez grand alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge.

  Corollaire :
  Si $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = q$ existe et si $q<1$, alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge.

  /:\ Si $(a_n)^{1/n} \geqslant 1$ pour un nombre infini d'indices alors $a_n \geqslant 1$ pour un nombre infini d'indices. On sait alors que (a_n) ne tend pas vers 0 et donc $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ diverge.

  /!\ Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ on ne peut pas conclure !
  Il ne suffit pas d'avoir $(a_n)^{1/n} < 1$ pour tout n.
  Pour le théorème, il faut avoir un $q<1$ tel que $(a_n)^{1/n} \leqslant q$ pour tout n assez grand.

- Critère de d'Alembert (encore plus utile) :
  On suppose que $a_n > 0$. S'il existe $q<1$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ pour tout n assez grand alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge.

  Corollaire 1 :
  Si $a_n > 0$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ existe, $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge.

  /!\ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pour tout n ne suffit pas !

  Corollaire 2 : si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ diverge.

  /:\ Dans le corollaire, le cas où $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ n'apparait pas : « d'Alembert » ne permet pas de conclure.

  Un autre critère peut souvent aider dans le cas où $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. C'est le critère de Raabe :

- On suppose que $a_n > 0$ pour tout n.
  1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant \alpha$ pour tout n assez grand alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge.
  2. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant \alpha$ pour tout n assez grand alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ diverge.

  Corollaire : si $a_n > 0$ pour tout n et si

  $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \gamma$ existe alors
  si $\gamma > 1$ alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge
  si $\gamma < 1$ alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ diverge

  /:\ Si $\gamma = 1$ on ne peut toujours pas conclure.

  /:\ Si $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$ existe alors
  $\lim \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 0$ et $\lim \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 1$
  C'est un cas exclu du critère de d'Alembert.

- <u>Théorème de condensation de Cauchy</u> :
  Soit (a_n) une suite positive décroissante. La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.

Les séries alternées

- <u>Définition</u> :
  Une série $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ est appelée série alternée si le signe de a_{n+1} est opposé au signe de a_n pour tout n.

  <u>Exemple</u> : la série de Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} -1^n \frac{1}{n}$ qui converge d'après le <u>critère de Leibniz</u> :

- On suppose que $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ est alternée, que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et que $(|a_n|)_{n\geqslant p}$ est une suite décroissante, alors la série converge.

  /!\ Il faut vérifier les trois hypothèses avant d'appliquer ce critère !

  /:\ Comme toujours, les premiers termes n'importent pas pour la convergence : il suffit que les signes de a_n et a_{n+1} soient opposés pour n assez grand et que $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$ pour tout n assez grand.

  /:\ Les sommes des séries sont souvent difficiles à obtenir : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\ln 2$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

  /:\ Rajout pour le critère de Leibniz : sous les mêmes conditions on pose $S = \sum_{n=p}^{\infty} a_n$, $S_{2n} = \sum_{l=p}^{2n} a_l$, $S_{2n+1} = \sum_{l=p}^{2n+1} a_l$ alors S est toujours entre S_{2n} et S_{2n+1}.

Les séries générales

- <u>Théorème</u> (critère de Cauchy pour les séries) :
  La série $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si

  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $m > n > N$, $|\sum_{l=n+1}^{m} a_l| < \epsilon$.

  /:\ Rappel (le critère de Cauchy pour les suites) :
  $\lim_{n\to\infty} d_n$ existe $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N, |d_m - d_n| < \epsilon$

  /:\ On applique rarement ce critère de Cauchy pour les séries. Beaucoup plus souvent, on applique la définition de la <u>convergence absolue</u> :

- On dit que $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge absolument si $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ converge.

  <u>Ex.1</u> : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ converge absolument car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

  <u>Ex.2</u> : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ne converge pas absolument car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. On sait, par contre, qu'elle converge d'après le critère de Leibniz.

  /:\ On dit parfois « une série converge conditionnellement » si elle converge mais ne converge pas absolument.

  /:\ Il est souvent facile de déterminer la convergence de $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ en appliquant un des critères pour les séries positives. On peut ensuite (parfois) déduire la convergence de $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ par :

- <u>Théorème</u> :

Si $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge absolument alors elle converge.

/!\ Il existe beaucoup de séries convergentes qui ne convergent pas absolument.

<u>Corollaire</u> (critère des majorants pour les séries générales) :
Si $|a_n| \leqslant c_n$ pour tout n suffisament grand et si $\sum_{n=p}^{\infty} c_n$ converge alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge aussi (et même absolument).

<u>Corollaire</u> (critère de Cauchy) :

1. Si $\exists q \in]0,1[$ tel que $|a_n|^{1/n} \leqslant q$ pour tout n assez grand, alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge absolument.
2. Si $|a_n| \geqslant 1$ pour un nombre infini d'indices n, alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ diverge.

<u>Corollaire</u> (critère de d'Alembert) :
On suppose que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant p$.
Si $\exists q \in]0,1[$ tel que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant q$ pour tout n assez grand, alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge absolument.

<u>Corollaire</u> (critère de Raabe) :
Si $\exists \alpha > 1$ tel que $n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} - 1\right) \geqslant \alpha$ pour tout n assez grand, alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge absolument.

/:\ Les séries absolument convergentes ont une propriété interessante, fausse pour les autres :

- <u>Théorème</u> (des permutations) :

Soit $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ absolument convergente et $p : \mathbb{N}_q \to \mathbb{N}_q$ une bijection (avec $\mathbb{N}_q = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant q\}$, on appelle p une permutation infinie). Alors $\sum_{n=q}^{\infty} a_{p(n)}$ converge et $\sum_{n=q}^{\infty} a_{p(n)} = \sum_{n=q}^{\infty} a_n$.

/:\ En bref : pour une série absolument convergente, l'ordre des termes n'importe pas.

/!\ Ce théorème devient faux si la série ne converge pas absolument !

- <u>Théorème</u> :

On suppose que $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ converge, mais $\sum_{n=q}^{\infty} |a_n|$ diverge. Alors :

1. $\exists p : \mathbb{N}_q \to \mathbb{N}_q$ bijective tel que $\sum_{n=q}^{\infty} a_{p(n)}$ diverge.
2. $\forall \gamma \in \mathbb{R}, \exists p : \mathbb{N}_q \to \mathbb{N}_q$ bijective tel que $\sum_{n=q}^{\infty} a_{p(n)} = \gamma$.

- <u>Théorème</u> (produit de Cauchy) :

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries absolument convergentes.
On pose $C_n := a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n$ alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ appellée « produit de Cauchy » de $\sum a_n$, $\sum b_n$ converge aussi (absolument) et on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

/:\ Le « produit de Hadamard », $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, qui semble « naturel » au début est beaucoup plus difficile à traiter, moins interessant pour les applications.

/:\ Le « produit de Cauchy » de deux séries entières donne une série entière... c'est donc le produit naturel des séries !

SOMMATIONS PARTIELLES (ABEL)

Vous connaissez l'intégration par parties :

$$\int f\,g'=f\,g-\int f'\,g$$

Analogies :
dérivation <--> différence
intégration <--> sommation

La sommation partielle est l'analogue de l'intégration par parties en théories des séries.

Considérons une somme, on suppose qu'il existe une suite (A_l) tel que $A_{l+1}-A_l=a_l$. Alors (après calcul on trouve) :

$$\sum_{l=k}^{n} a_l b_l \;=\; A_{n+1}b_n \;-\; A_k b_k \;+\; \sum_{l=k+1}^{n} A_l(b_{l-1}-b_l)$$

Formule de sommation partielle
valable si $A_{l+1}-A_l=a_l$ pour $l=k,\dots,n$

Analogies avec l'intégration par parties :

f <--> A_l	f' <--> $A_{l+1}-A_l=a_l$
g <--> b_l	g' <--> b_l-b_{l-1}

- Théorème d'Abel (Leibniz généralisé) :
  Soient (a_n), (b_n) deux suites. On suppose :
  1. Les sommes partielles de $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ sont bornées.
  2. $b_n\to 0$ quand $n\to\infty$.
  3. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

  Alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n b_n$ converge.

/:\ La condition 1 s'écrit en détails $\exists K,\forall N,|\sum_{n=p}^{N} a_n|\leqslant K$

/:\ Le critère de Leibniz est un cas particulier du théorème : on prend $a_l=(-1)^l$. Les sommes partielles sont alors soit ± 1, soit 0 car $a_l+a_{l+1}=0$ et toute somme partielle se réduit à un terme au plus ! Les conditions 2 et 3 sont aussi dans les hypothèses de Leibniz.

/:\ Ce théorème n'est pas le plus général possible. On peut remplacer la condition 3 par $\sum_{n=p+1}^{\infty}|b_n-b_{n-1}|$ converge (on dit que b_n est de variation bornée).

/:\ A retenir : $|\sum_{n=1}^{N}\cos(\alpha n)|\leqslant\frac{2}{|e^{i\alpha}-1|}$ $|\sum_{n=1}^{N}\sin(\alpha n)|\leqslant\frac{2}{|e^{i\alpha}-1|}$
(avec $0<\alpha<2\pi$)

Corollaire :
On suppose que $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge et que $\sum_{n=p+1}^{\infty}|b_n-b_{n-1}|$ converge, alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Corollaire :
Si $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge et (b_n) est monotone et converge, alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n b_n$ converge.

/!\ L'énoncé suivant est faux : si $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge et $\lim_{n\to\infty} b_n=L$ existe alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n b_n$ converge. Il manque l'hypothèse (b_n) monotone ou bien $\sum_{n=p+1}^{\infty}|b_n-b_{n-1}|$ converge.

LES SERIES ENTIERES

Ces séries sont de types $\sum_{n=p}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ avec $p \in \mathbb{N}$.
Il s'agit de « séries numériques avec paramètres ».

/:\ Souvent on n'étudie que $\sum_{n=p}^{\infty} a_n t^n$, c'est équivalent : il suffit de poser $t=x-x_0$.

- <u>Théorème</u> (rayon de convergence) :
  $\exists ! R \in [0;\infty]$ (on note $[0;\infty]=[0;\infty[\, U \, \{\infty\}$) tel que l'on ait :
  1. Si $|x-x_0|<R$ alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge (absolument).
  2. Si $|x-x_0|>R$ alors $\sum_{n=p}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ diverge.

  R Est appelé le rayon de convergence de la série (rdc).

/:\ Si $|x-x_0|=R$, on ne peut encore rien dire ! Il faut étudier $\sum_{n=p}^{\infty} a_n R^n$ et $\sum_{n=p}^{\infty} a_n (-R)^n$ séparemment.

/:\ Si $R=0$, la série diverge pour tout $x \neq x_0$.
Pour $x=x_0$, on pose $(x-x_0)^n=0 \;\; si \;\; n \geqslant 1$ et $(x-x_0)^n=1 \;\; si \;\; n=0$. En tout cas, pour $x=x_0$ la série converge trivialement.

/:\ Si $R=\infty$ la série converge pour tout x.

- <u>Proposition</u> (définition alternative) :
  Si $L=inf(m)$, où m est l'ensemble des $K>0$ tel que $\exists N, \forall n \geqslant N, \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant K$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n=p}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ est égal à $R=1/L$.

<u>Corollaire</u> (Cauchy) :
Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=L$ existe, alors le rdc est $R=1/L$.

<u>Corollaire</u> (d'Alembert) :
Si $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L$ existe, alors le rdc est $R=1/L$.

/!\ Ne pas oublier que $R=\frac{1}{L}$!

/:\ Ici, on pose $\frac{1}{0}=\infty$ et $\frac{1}{\infty}=0$.

/:\ Il n'est pas obligatoire d'utiliser le corollaire ou la proposition pour déterminer le rdc. Si on trouve une autre méthode qui détermine qu'on a convergence si et seulement si $|x-x_0|<R$ alors R est le rdc !

- <u>Notation</u> (ici $R \neq 0 \; et \; R<\infty$) :
  L'ensemble des x avec $|x-x_0|<R$, avec R est le rdc, est appelé « intervalle de convergence » $]x_0-R, x_0+R[$. Si la série converge en $x=x_0-R$ on l'ajoute à l'intervalle de convergence, de même pour $x=x_0+R$.

/:\ Il est possible que m de la proposition soit vide : on pose alors $L=inf(0)=\infty$.

- <u>Proposition</u> :

On la note pour $x_0=0$ mais en général, quand on a « $x-x_0$ » à la place de « x », tout reste vrai.

Soit $\sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=p}^{\infty} b_n x^n$ deux séries entières, de rayon de convergences respectifs R_a et R_b :

1. Alors $\sum_{n=p}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ a un rdc $R\geqslant min(R_a,R_b)$ et
$\sum_{n=p}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=p}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=p}^{\infty}b_n x^n$ si $|x|<min(R_a,R_b)$.

2. Si $\alpha\in\mathbb{R}$, alors $\sum_{n=p}^{\infty}\alpha a_n x^n=\alpha\sum_{n=p}^{\infty}a_n x^n$ quand $|x|<R_a$.

3. On suppose que $p=0$ et on pose $c_n=a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\ldots+a_n b_0$.
Alors $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ a un rdc $R\geqslant min(R_a,R_b)$ et quand
$|x|<min(R_a,R_b)$, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)$ (produit Cauchy)

4. La fonction définie par $f(x)=\sum_{n=p}^{\infty}a_n x^n$ est dérivable en tout x avec $|x|<R$ et on peut dériver « terme à terme »
$f'(x)=\sum_{n=p}^{\infty}n a_n x^{n-1}=\sum_{n=p-1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. Par conséquent, f est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$ et on peu calculer les dérivées supérieures en dérivant « terme à terme ».

5. f est intégrable sur tout intervalle $[0,x]$ ou $[x,0]$ dans $]-R,R[$ et $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=p}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=p+1}^{\infty}a_{n-1}\frac{x^n}{n}$ quand $|x|<R$ peut être déterminer en intégrant « terme à terme ».

- Séries connues :

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ converge si et seulement si $|x|<1$ donc $R=1$.

$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\qquad a_n=\frac{1}{n!}$ $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}\to 0$ $\qquad R=\frac{1}{0}=\infty$

$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\qquad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\ln(1+x)=?$ $\qquad \frac{d}{dx}\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$\Rightarrow\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}$

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ $\qquad |x|<1$

$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

- Théorème :

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ est une série entière de rdc $R>0$:

1. Si $a_0\neq 0$ alors $1/f(x)$ admet aussi une série entière de la forme $1/f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ avec un rdc $\tilde{R}>0$. On a $b_0=1/a_0$ et on calcule les autres b_n par récurrence en utilisant la formule $a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\ldots+a_n b_0=0$ pour $n\geqslant 1$.

2. (composition) Soit $g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(t-t_0)^n$ une série entière de rdc $\tilde{R}>0$. On suppose que $f(g(t_0))$ est définie c'est à dire que $|g_0-x_0|<R$. Alors la composition $f(g(t))$ admet aussi une série entière de la forme $f(g(t))=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(t-t_0)^n$ avec un rdc $S>0$. On a $h_0=f(g(t_0))=f(g_0)$.

3. On suppose que $a_1=f'(x_0)\neq 0$. Alors il existe une série $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a_0)^n$ avec un rdc $\tilde{R}>0$ tel que $f(g(x))=x$ pour tout x tel que $|x-a_0|<\tilde{R}$ et $|g(x)-x_0|<R$.

/:\ Toute série entière avec $a_1\neq 0$ admet une fonction réciproque.

- Théorème (Abel) :

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ une série entière de rdc $R>0$ et $R\neq\infty$. On suppose qu'elle converge en un point frontière de son intervalle de convergence, c'est à dire on suppose qu'elle converge en $x=x_0+R$ (respectivement $x=x_0-R$) alors la fonction f donnée par $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ est aussi continue au point $x=x_0+R$ (respectivement $x=x_0-R$).

/:\ Rappel : on sait déjà que f est infiniment dérivable (et donc continue) sur $]x_0-R, x_0+R[$.

/:\ Le théorème d'Abel est très utile pour déterminer les sommes de certaines séries numériques :

- Considérons $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = ?$.

On pose $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$, son rdc $R=1$.

On dérive $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x}$ si $|x|<1$.

Donc $f(x)=f(0)+\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$ --> $f(x)=\log(1+x)$ si $|x|<1$.

La valeur interessante de $f(x)$ est pourtant $f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

Cette série converge aussi. On peut appliquer le théorème d'Abel qui dit que f est continue en $x=1$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

Or on sait que $f(x)=\ln(1+x)$ si $0<x<1$.

Donc $\lim_{x\to 1^-}\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,

or $\ln$ est continue et donc $\lim_{x\to 1^-}\ln(1+x)=\ln 2$.

On conclue $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2$.

INTEGRALES IMPROPRES

Elle est assez analogue à la théorie des séries numériques. On parle d'intégrale impropre si :

- l'intervalle d'integration n'est pas bornée ;
- la fonction qu'on intègre n'est pas définie partout.

- Définitions :

1. On dit que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge si $\int_a^T f(x)dx$ existe $\forall T>a$, c'est à dire si f est intégrable au sens de Riemman sur chacun des intervalles $[a, T]$ et si $\lim_{T\to\infty}\int_a^T f(x)dx$ existe.

   Cette limite est notée $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

   On définit $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ de manière analogue.

2. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ converge en a si $\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ existe pour tout $\epsilon>0$, c'est à dire f est intégrable sur $[a+\epsilon, b]$ pour tout $\epsilon>0$ et si la limite $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ existe.

3. De manière analogue, on définit que $\int_a^b f(x)dx$ converge en b par l'existence de $\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$.

4. Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ convergent toutes les deux, on dit que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge absolument.

- <u>Intégrales à plusieurs singularités</u> :
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ est singulier ou impropre à cause de $-\infty$ et de ∞. Il faut l'écrire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. Alors si $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge (c'est à dire $\lim_{T\to-\infty} \int_{T}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$ existe) et si $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge (c'est à dire $\lim_{S\to\infty} \int_{0}^{S} \frac{1}{1+x^2} dx$ existe), on dit que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge, et on a :
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \ldots + \int_{0}^{\infty} \ldots = \lim_{T\to-\infty} \left(\int_{T}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx \right) + \lim_{S\to\infty} \left(\int_{0}^{S} \frac{1}{1+x^2} dx \right)$$

/!\ Il faut l'existence de deux limites pour la convergence de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$, l'existence de $\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{1}{1+x^2} dx$ ne suffit pas !!!

<u>Lemme</u> :
Il n'importe pas en quel point on sépare $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots$ en deux intégrales pour la définition de la convergence : on pourrait aussi étudier $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

- Il est aussi possible que $\int_{a}^{b} f(x) dx$ est singulière (impropre) en un <u>point intérieur</u> c'est à dire $\exists c \in]a,b[$ où f n'est pas définie. Dans ce cas, on sépare l'intégrale en plusieurs morceaux afin que chaque morceau soit impropre en une limite, et on dit que l'intégrale converge si chacun des morceaux converge (si un seul morceau ne converge pas alors l'intégrale diverge).

/:\ Dans la suite, on ne considère que les intégrales à une singularité. C'est à dire $\int_{a}^{b} f(x) dx$ où f n'est pas définie en a ou en b ou $a=-\infty$ ou $b=\infty$. Nous allons considéré le cas où $b=\infty$, les autres cas sont analogues.

- <u>Théorème</u> (condition de Cauchy) :
Soit $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Alors $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists M, \forall T > S > M, |\int_{S}^{T} f(x) dx| < \epsilon$.

- <u>Théorème</u> (critère des majorants) :
Soient $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : [a,\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction <u>positive</u> et continue. Si $|f(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,\infty[$ et si $\int_{a}^{\infty} g(x) dx$ converge, alors $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ converge.

/:\ Comme pour le critère des majorants, on a un critère des minorants comme corollaire.

<u>Corollaire</u> (critère des minorants) :
Soient $f, g : [a,\infty[\to \mathbb{R}_+$ deux fonctions <u>positives</u> et continues. Si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,\infty[$ et si $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ diverge, alors $\int_{a}^{\infty} g(x) dx$ diverge.

- <u>Théorème</u> :
Soit $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction <u>positive</u> et continue. Alors $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si la fonction $T \to \int_{a}^{T} f(x) dx$ est bornée, c.à.d. si et seulement si $\exists K, \forall T > a, \int_{a}^{T} f(x) dx \leqslant K$.

<u>Exemples</u> (utiles pour appliquer le critère) :

1. $\int_a^\infty \frac{1}{(x-b)^\alpha}dx$ $\quad a>b \quad$ $converge\ si\ \alpha>1$, $diverge\ si\ \alpha\leqslant 1$

2. $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ $\quad a<b \quad$ $converge\ si\ \alpha<1$, $diverge\ si\ \alpha\geqslant 1$

3. En particulier, $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)}dx$ diverge. On sait que $\ln(2+x)\geqslant\ln 3$ quand $x\geqslant 1$, donc $0<\frac{\ln 3}{x-1}\leqslant\frac{\ln(2+x)}{x-1}$.
Comme $\int_1^\infty \frac{\ln 3}{x-1}dx=\ln 3\int_1^\infty \frac{1}{x-1}dx$ diverge, on conclue par le critère des minorants que $\int_1^3 \frac{\ln(2+x)}{(x-1)}dx$ diverge aussi.

- <u>Théorème</u> :
(comparaison entre séries numériques et intégrales)
Soit $f:[a,\infty[\to\mathbb{R}_+$ une fonction positive continue et décroissante (pour simplifier, $a\in\mathbb{N}$) alors :
$$\sum_{n=a}^\infty f(n)\ \ converge \ \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x)dx\ \ converge$$
et on a $\sum_{n=a}^\infty f(x)\geqslant\int_a^\infty (fx)dx\geqslant\sum_{n=a+1}^\infty f(n)$.

- Dans des cas difficiles, on applique l'intégration par parties :
$$\int_a^T f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^T-\int_a^T f'(x)g(x)dx$$
Donc si $\lim_{T\to\infty} f(T)g(T)$ existe et $\int_a^\infty f'(x)g(x)dx$ converge, alors $\int_a^\infty f(x)g'(x)dx$ converge aussi.

- <u>Théorème d'Abel</u> :
Soit $f,g:[a,\infty[\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose :
1. $g(x)\geqslant 0,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0$
2. $g(x)$ est décroissante
3. La fonction $T\to\int_a^T f(x)dx$ est bornée,
c'est à dire $\exists K,\forall T>a,\left|\int_a^T f(x)dx\right|<K$;

Alors $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ converge.

/:\ Comme pour les séries, on peut remplacer la condition 2 par « $g\in C^1\ \ et\ \int_a^\infty |g'(x)|dx$ converge ».

<u>Exemple</u> : $\int_1^\infty \sin(x^3)x\,dx$
On fait un changement de variable en posant $t=x^3$ ou $x=t^{1/3}$
$\int_1^\infty \sin(x^3)x\,dx=\int_1^\infty \sin(t)t^{1/3}\frac{1}{3}t^{-2/3}dt$ car $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}t^{-2/3}\Rightarrow\frac{1}{3}t^{-2/3}dt$
Et on applique Abel !

PETITS RAPPELS

- <u>Règle de l'Hospital</u> : si $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ alors $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
si $\lim\frac{U_n}{V_n}=\frac{\infty}{\infty}$ alors $\lim\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n'}{V_n'}$

- Pour trouver la convergence d'une série, on essaie :
-> cauchy
-> d'alembert
-> raabe
-> majoration / minoration
-> comparaison avec integrale